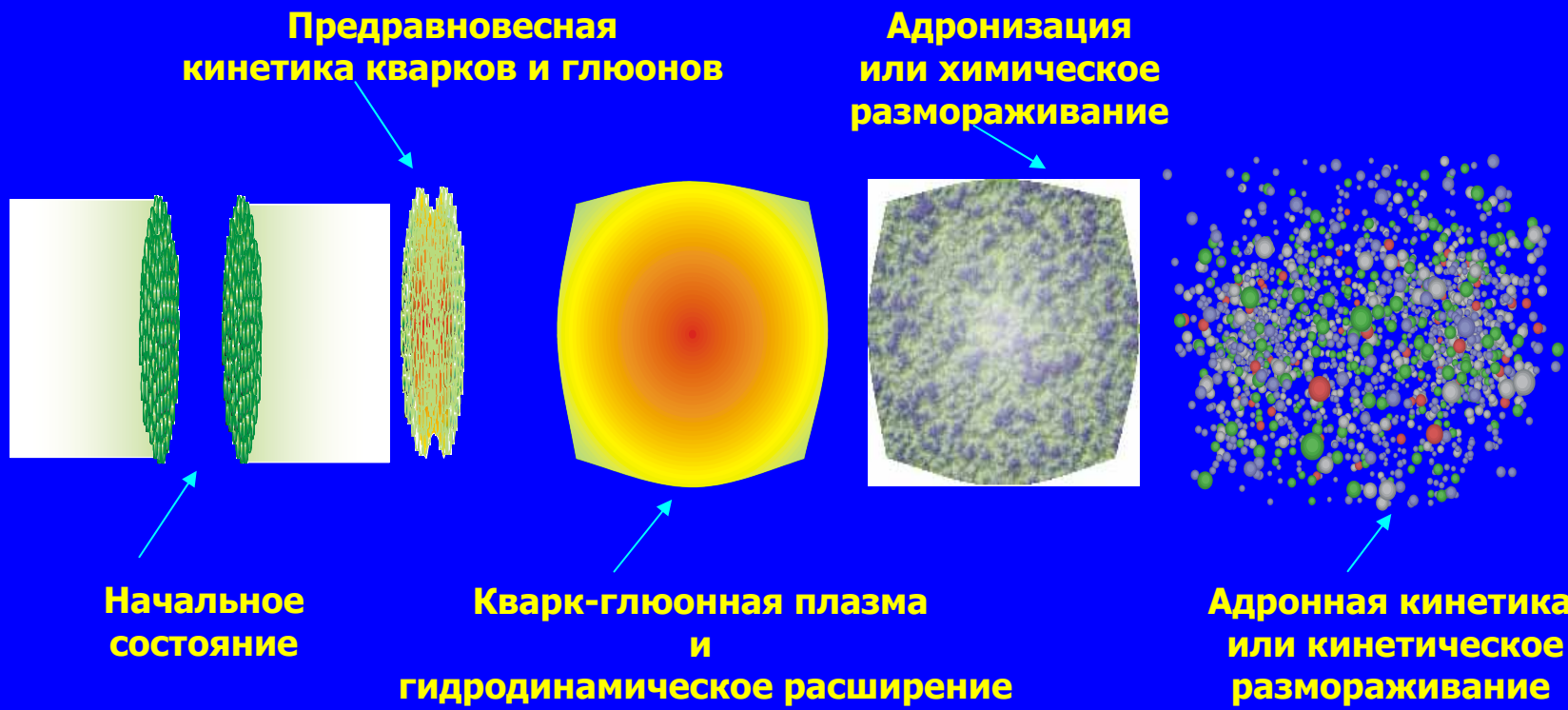
Введение в модели для описания столкновений релятивистких тяжелых ионов

Н.С. Амелин, ОИЯИ Дубна

- Введение
- Релятивистская кинематика и распределения частиц
- Модель Глаубера и струнные модели
- Релятивистская кинетика и кинетические модели
- Релятивистская гидродинамика и гидродинамические модели
- Рождение адронов и статистические модели
- Заключение

Предполагаемая картина эволюции столкновения тяжелых ионов на основе данных с коллайдера релятивистских тяжелых ионов RHIC

S.Bass'02



Монте-Карло генераторы событий неупругих столкновениий релятивистских ядер

- МК генераторы событий это, реализованные в виде компьютерных программ, феноменологические (содержат много параметров) и численные (используют математический метод МК) модели, которые с помощью компьютера воспроизводят (генерируют события) результаты взаимодействия ядер целиком (эксклюзивно);
- Они широко и эффективно используются как средство предсказания данных, необходимых при планировании экспериментов и создании экспериментальных установок;
- Они являются необходимым средством для анализа полученных экспериментальных данных, так как с их помощью мы можем учитывать особенности эксперимента: пределы измерения характеристик частиц (аксептанс установки), ошибки измерений (разрешение установки), ошибки в идентификации частиц;
- Компьютерные программы МК генераторов часто являются частью компьютерных программ моделирования, связанного с решением практических задач, когда необходимо моделировать прохождение высокоэнергетических ионов в различных материалах;
- Наряду с введением в модели, здесь мы подробно рассмотрим пример одного из таких генераторов, написанного на объекто-ориентированном языке программирования C++ с использованием средств пакета ROOT (R. Brun, CERN) и продемонстрируем его работу.

Релятивистская кинематика

4-вектор пространства-времени в заданной покоящейся системе координат запишем как $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$. **В другой системе отсчета, движущейся со скоростью** β **в направлении оси** x^1**, координаты частицы запишем как** $(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})$. **Новые координаты определяются через старые координаты с помощью преобразования Лоренца**

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1\prime} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2\prime} &= x^3 \\ x^{3\prime} &= x^3, \end{aligned} \tag{1}$$

где Лоренц фактор $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Можно записать преобразования Лоренца в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3. \end{pmatrix} \tag{2}$$

Последнее выражение можно записать в виде, подразумевая суммирование по паре одинаковых индексов,

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \tag{3}$$

Лоренцев скаляр это инвариантная относительно преобразования Лоренца комбинация 4-х векторов, записанная в виде

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2 - (x^{2\prime})^2 - (x^{3\prime})^2 \neq \sum_{\nu=0}^{3} x^\nu x^\nu. \tag{4}$$

Можно определить матрицу

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

и этот скаляр записать как

$$I = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu. \tag{6}$$

4-х вектора с верхними индексами называется контравариантными, а 4-х вектора с нижними индексами называется ковариантными и соотносятся следующим образом

$$x_0 = x^0, x_1 = -x^1, x_2 = -x^2, x_3 = -x^3. \tag{7}$$

Итак, для двух 4-векторов a^μ и b^μ их комбинация $a^\mu b_\mu$ является Лоренцевым скаляром:

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a \cdot b = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3. \tag{8}$$

4-вектор скорости. Скорость частицы в направлении x определяется как

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \tag{9}$$

Можно определить x-компоненту 4-х вектора скорости

$$u_x = \frac{dx}{d\tau} = \gamma v_x, \tag{10}$$

когда время (собственное время) измеряется в системе покоя частицы $d\tau = dt/\gamma$, где $\gamma > 1$, и её нулевую компоненту

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{\gamma dt}{dt} = \gamma. \tag{11}$$

Тогда все компоненты 4-скорости записываются следующим образом

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{12}$$

или

$$u = \gamma(1, v_x, v_y, v_z). \tag{13}$$

и $u^\mu u_\mu = +1$, т.е. u^μ-времени-подобный 4-х вектор.

4-вектор энергии-импульса. 4-х импульс определяется умножением массы на 4-х скорость

$$p^\mu = mu^\mu. \tag{14}$$

Нулевая компонента 4-х импульса это энергия

$$p^0 = \gamma m = E. \tag{15}$$

Таким образом 4-х импульс имеет компоненты

$$p = (E, p_x, p_y, p_z), \tag{16}$$

которые преобразуются при переходе к новой системе отсчета движущейся вдоль оси z со скоростью β

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_z \\ p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_z \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} \tag{17}$$

и

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \tag{18}$$

Лабораторная система и система центра масс. Есть два типа экспериментов со столкновениями ядер: (1) когда пучок ядер-снарядов с 4-х импульсами $(E_1, \vec{p}_1) = (E_p, 0, 0, p_p)$ сталкивается с неподвижными ядрами мишени с 4-х импульсом $(E_2, \vec{p}_2) = (m_p, 0, 0, 0)$ (эксперименты на фиксированной мишени, столкновения в лабораторной системе) и (2) когда пучок ядер-снарядов с 4-х импульсами $(E_1, \vec{p}_1) = (E_p, 0, 0, p_p)$ сталкивается с пучком ядер мишени с 4-х импульсами $(E_2, \vec{p}_2) = (E_p, 0, 0, -p_p)$ (коллайдерные эксперименты и столкновения в системе центра масс сталкивающихся ядер).

Полная энергия в этих экспериментах, доступная для взаимодействия или полная энергия в системе центра масс сталкивающихся ядер определяется как

$$\begin{aligned} E_{\text{ц.м.}} = \sqrt{s} &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} \\ &= \sqrt{(E_p + m_t)^2 - \vec{p}_p^{\,2}}, \text{ в лабораторной системе} \\ &= \sqrt{m_p^2 + m_t^2 + 2E_p m_t} \\ &\approx \sqrt{2E_p m_t} \\ &\approx \sqrt{2E_p}, \text{ ГэВ на нуклон} \\ &= 2E_p, \text{ в системе центра масс} \end{aligned} \tag{19}$$

Ускоритель ядер Au или Pb	$\sqrt{s}$, ГэВ/нуклон
Нуклотрон, Дубна, фикс. мишень	3.5
SPS, ЦЕРН, фикс. мишень	19.6
RHIC,Брукхэвен, коллайдер	200
LHC, ЦЕРН, коллайдер	7000

Быстрота частицы с энергией E и продольным импульсом p_z определяется выражением

$$y = 0.5 \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right) = 0.5 \ln \left(\frac{1 + p_z/E}{1 - p_z/E}\right) = 0.5 \ln \left(\frac{1 + v_z}{1 - v_z}\right). \quad (20)$$

Определяя поперечной массу частицы

$$m_t = \sqrt{E^2 - p_z^2} = \sqrt{m^2 + p_t^2}, \quad (21)$$

где $p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ это поперечный импусьс частицы, мы можем выразить энергию и продольный импульс частицы в терминах быстроты:

$$E = m_t \cosh y = \frac{1}{2} m_t (e^y + e^{-y}), p_z = m_t \sinh y = \frac{1}{2} m_t (e^y - e^{-y}). \quad (22)$$

При низких энергия частицы, когда её скорость $v_z \to 0$ быстрота становится близкой к продольной скорости

$$y = 0.5 \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right) = 0.5 \ln \left(\frac{(1 + v_z)^2}{1 - v_z^2}\right) \approx \ln (1 + v_z) \approx v_z. \quad (23)$$

При высоких энергиях частицы, когда её скорость $v_z \to 1$

$$y = 0.5 \ln \left(\frac{E + p \cos\theta}{E - p \cos\theta}\right) \approx 0.5 \ln \left(\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}\right) = -\ln \tan \theta/2. \quad (24)$$

При высоких энергиях частицы имеет смысл ввести специальное название переменной быстроте. Её называют псевдобыстротой $\eta = -\ln\tan\theta/2$, так как она более проста в измерении по сравнению с переменной быстроты. Для неё необходимо регистрировать только угол эмиссии частицы θ относительно направления начального пучка.

При преобразованиях Лоренца в систему движущуюся в направлении оси z со скоростью β быстрота частицы y' в новой системе получается просто "сдвигом"быстроты частицы y в старой системе на величину быстроты новой системы Y:

$$y' = 0.5\ln(\frac{E' + p'_z}{E' - p'_z}), \tag{25}$$

где

$$E' = \gamma(E - \beta p_z), p' = \gamma(p_z - \beta E), \tag{26}$$

$$y' = 0.5\ln(\frac{E + p_z}{E - p_z}) - 0.5\ln(\frac{1+\beta}{1-\beta}) = y - Y. \tag{27}$$

Распределения частиц

Элемент фазового объема инвариантный относительно преобразований Лоренца имеет вид d^3p/E. Он также может быть выражен через быстроту y и поперечный импульс p_t:

$$\begin{aligned}\frac{d^3p}{E} &= dp_x dp_y dp_z/E = dp_x dp_y \gamma dp_z/\gamma E = dp'_x dp'_y dp'_z/E' \\ &= 2\pi p_t dp_t dp_z/E \\ &= 2\pi p_t dp_t dy \\ &= \pi dp_t^2 dy \\ &= d^2p_t dy.\end{aligned} \tag{28}$$

Через элемент фазового объема мы можем определить инвариантное дифференциальное сечение частиц рожденных в результате столкновения ядер, которые можно построить измеряя тип и кинематические характеристики частиц

$$\begin{aligned}&\frac{Ed^3\sigma}{d^3p} \\ &= \frac{Ed^3\sigma}{2\pi p_t dp_t dp_z} \\ &= \frac{d^3\sigma}{d^2p_t dy} \\ &= \frac{d^3\sigma}{\pi dp_t^2 dy} \\ &= \frac{d^3\sigma}{d^2p_t dy}.\end{aligned} \tag{29}$$

В эксперименте также не всегда возможно провести измерения (инвариантные сечения интегрируются) по отдельные компонентам 4-х импульсов частиц.

Гистограммы распределений. В результате регистрации неупругих ядерных взаимодействий, получаются дискретные значения всех или отдельных компонент 4-х импульсов рожденных частиц (E, p_x, p_y, p_z). Бывает определен сорт частиц. Тогда можно построить необходимые дискретные распределения частиц, называемых гистограммами, по этим переменным.

Например, гистограмму по быстроте y (форма которой сохраняется при преобразованиях Лоренца!), измеряя экспериментально значения быстрот частиц в событии столкновения ядер y_j^k:

$$\frac{\sigma \Delta \bar{N}}{\Delta y} = \frac{\sigma}{N_{evt}} \sum_{k=1}^{N_{evt}} \sum_{j=1}^{n^k} \Theta_{\Delta y}(y_j^k - y) \Rightarrow \frac{\sigma d\bar{N}}{dy}, N_{evt} \to \infty, \Delta y \to 0 \qquad (30)$$

где σ-полное сечение взаимодействия ядер, $\Theta_{\Delta y}(y_k - y)$ это функция равная нулю или единице, определяет попадание значения y_k в канал гистограммы (бину) шириной Δy. $\bar{N}$ средняя множественность частиц в одной бине со значением центра бины y. N_{evt} означает число событий столкновений ядер, необходимы для обеспечивания статистической точности и n^k - число выбранных для построения распределения частиц в k-ом событии.

Femtoscopy.

Рассмотрим простой пример эмиссии двух тождественных частиц, например, пионов со спином 0, то есть бозонов. Пренебрегая корреляциями между точками испускания частиц и их импульсами и (!) квантовой механикой, точно определяя точки $\vec{x}$ и $\vec{y}$, мы имеем для амплитуда эмиссии двух тождественных пионов с импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ из пространственных точек $\vec{x}$ и $\vec{y}$ выражение

$$A_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{i\vec{p}_1\vec{x}+i\vec{p}_2\vec{y}} + e^{i\vec{p}_1\vec{y}+i\vec{p}_2\vec{x}}], \tag{31}$$

которое является следствием симметризации амплитуды для Бозе частиц. Тогда квадрат этой амплитуды или статистический вес пары частиц:

$$|A_{12}|^2 = 1 + \cos[\vec{q}(\vec{x} - \vec{y})], \tag{32}$$

где $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$. Вероятность эмиссии источника с плотностью распределения точек эмиссии $\rho(\vec{x})$, где

$$\int d^3x\rho(\vec{x}) = 1, \tag{33}$$

определяется интегрированием по всем точкам:

$$P_{12}(\vec{q}) = C_2(\vec{q}) = \int d^3xd^3y|A_{12}|^2\rho(\vec{x})\rho(\vec{y}) \tag{34}$$

и может быть записана как

$$C_2(\vec{q}) = 1 + \int d^3xe^{i\vec{q}\vec{x}}\rho(\vec{x}) \int d^3ye^{-i\vec{q}\vec{y}}\rho(\vec{y}) = 1 + |F(q)|^2, \tag{35}$$

где $F(q)$ является Фурье образом функции источника.

Гауссов источник. Приведем пример статического (независящего от времени) источника тождественных пионов с плотностью распределения:

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{\pi R^2} e^{-\frac{\vec{x}^2}{R^2}}. \tag{38}$$

Для которого Фурье образ и корреляционная функция определяются соответственно выражениями:

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{x}\vec{q}} \rho(\vec{x}) d\vec{x} = e^{-\frac{R^2\vec{q}^2}{4}}, \tag{39}$$

$$C_2(\vec{q}) = P_{12}(\vec{q}) = 1 + e^{-\frac{R^2\vec{q}^2}{2}}. \tag{40}$$

Корреляционные функции. Измеряя 4-импульсы пар частиц $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ и $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$ в отдельных событиях неупругого взаимодействия ядер и беря пары частиц из смешанных событий (когда импульсы частиц не коррелируют), мы можем построить корреляционную функцию от инвариантной переменной $q_{inv} = \sqrt{-(p_1 - p_2)^2}$ в виде одномерной гистограммы. В каждой бине с номером j корреляционная функция аппроксимируется следующим образом

$$C_2(q_j) = \frac{\Delta N(q_j)}{\Delta N_{mix}(q_j)}, \tag{31}$$

где $\Delta N(q_j)$ число пар с данным q_j из одинаковых событий, $\Delta N_{mix}(q_j)$ такое же число пар, но когда импульсы частиц взяты из разных событий. Аналогичным образом мы можем построить корреляционные функции зависящие от компонент вектора q_{inv}. В отсутсвии корреляций $C_2(q_j) = 1$ во всех бинах и поэтому интегральное количество пар как из отдельных, так и из смешанных событий выбирается одинаковым.

Модельные корреляционные функции. Наиболее значимые импульсные корреляции, происхождение которых связано с квантовой статистикой тождественных частиц, в подавляющем большинстве моделей не учитываются, так как эти модели классические! Зато из классических моделей мы получаем не только значения 4-х импульсов частиц, но пространственно-временную информацию о рождении частиц. А тогда существует метод взвешивания (Копылов, Подгорецкий, Дубна, 1972) построения модельной корреляционную гистограммы по инвариантной переменной q_j (опуская индекс бины j):

$$C_2(q) = \frac{1}{\Delta N(q)} \sum_{i=1}^{\Delta N(q)} [1 \pm \cos(q^{(i)} \cdot x_{12}^{(i)})], \tag{32}$$

где $\Delta N(q)$ число пар в бине, $q^i = p_1 - p_2$ и $x_{12}^{(i)}$ разность пространственно-временных 4-векторов, описывающих точки эмиссии частиц из одинаковых событий. Строя гистограмму мы каждой выбранной паре частиц приписываем вес $[1 \pm \cos(q^{(i)} \cdot x_{12}^{(i)})]$, здесь знак $+$ относится к частицам с целым спинам-бозонам, а знак - относится к частицам с полуцелым спинам-фермионам.

Модель Глаубера (R. Glauber'55,Nobel Prize'05)

Вероятность столкновения ядерных нуклонов. Следуя геометрической картине, вероятность столкновения двух ядерных нуклонов при взаимодействии ядер с числом нуклонов A и B с прицельным параметром $\vec{b}$ определяется вероятностями $\rho_A(b_A, z_A)d\vec{b}_A dz_A$ и $\rho_B(\vec{b}_B, z_B)d\vec{b}_B dz_B$ найти соответственно один нуклон в объеме $d\vec{b}_A dz_A$ ядра A и другой нуклон в объеме $d\vec{b}_B dz_B$ ядра B и также вероятностью неупругого нуклон - нуклонного столкновения $t(b)\sigma_{in}$, когда нуклоны разделены друг от друга прицельным параметром $\vec{b}$. Данную вероятность можно формально определить следующим образом

$$T(\vec{b})\sigma_{in} = \int \rho_A(\vec{b}_A, z_A)d\vec{b}_A dz_A \rho_B(\vec{b}_B, z_B)d\vec{b}_B dz_B t(\vec{b} - \vec{b}_A - \vec{b}_B)\sigma_{in}. \quad (41)$$

Сечение неупругого нуклон - нуклонного столкновения σ_{in} обычно предполагается постоянным. Функция $T(\vec{b})$, называемая функцией профиля ядер, обычно нормируется на единицу и для сферически симметричных ядер $T(\vec{b}) = T(b)$. $\rho_{A,B}(b_{A,B}, z_{A,B})$ это нормированные ядерные плотности нуклонов. Нормированная на единицу функция, которая в случае неполяризованных нуклонов $t(\vec{b}) = t(b)$, называется функцией профиля нуклонов.

Вероятность n-кратного столкновения ядерных нуклонов. В модели Глаубера неупругие ядерные столкновения сводятся к независимым неупругим нуклон - нуклонным столкновениям.

Тогда зная вероятность столкновения ядерных нуклонов $T(\vec{b})\sigma_{in}$ мы определим вероятность n независимых столкновений нуклонов, которая определяется биноминальным распределением:

$$p(n,\vec{b}) = \frac{(AB)!}{n!(AB-n)!}[T(\vec{b})\sigma_{in}]^n[1-T(\vec{b})\sigma_{in}]^{AB-n}, \qquad (42)$$

где первый фактор означает число комбинаций из n столкновений среди AB возможностей и факторы $[T(\vec{b})\sigma_{in}]^n$, $[1-T(\vec{b})\sigma_{in}]^{AB-n}$ означают соответственно вероятности n столкновений и того, что $AB-n$ столкновений не происходят.

Сечение неупругого столкновения ядер. Из вероятности n независимых столкновений нуклонов при значении прицельного параметра $\vec{b}$ можно найти среднее число нуклонных столкновений при данном прицельном параметре

$$< n(\vec{b}) >= \sum_{n=1}^{AB} np(n,\vec{b}) = ABT(\vec{b})\sigma_{in}. \tag{43}$$

и, сдедовательно, среднее число нуклонных столкновений растет с ростом числа нуклонов ядра как $A^{4/3}$, так как $T(b) \sim A^{1/3}$. Можно также определить полную вероятность неупругого столкновения ядер:

$$\frac{d\sigma^{AB}}{d\vec{b}} = \sum_{n=1}^{AB} p(n,\vec{b}) = 1 - [1 - T(\vec{b})\sigma_{in}]^{AB} \tag{44}$$

и полное сечение неупругого взаимодействия ядер:

$$\sigma^{AB} = \int d\vec{b}\{1 - [1 - T(\vec{b})\sigma_{in}]^{AB}\}. \tag{45}$$

Оценка числа нуклонов-участников столкновения. Прицельный параметр $\vec{b}$ сталкивающихся A и B ядер прямо в эксперименте не измеряется. Однако, с помощью калориметра настроенного, на регистрацию энергии частиц вылетающих под малыми углами, мы можем оценивать число нуклонов-участников столкновения ядер. А их среднее число зависит от прицельного параметра:

$$< n_{part}(b) >= \int d^2b_1 d^2b_2 \delta(\vec{b} - \vec{b}_1 - \vec{b}_2) A[T_A(b_1) P^B_{\geq 1}(b_2) + BT_B(b_2) P^A_{\geq 1}(b_1)], \tag{46}$$

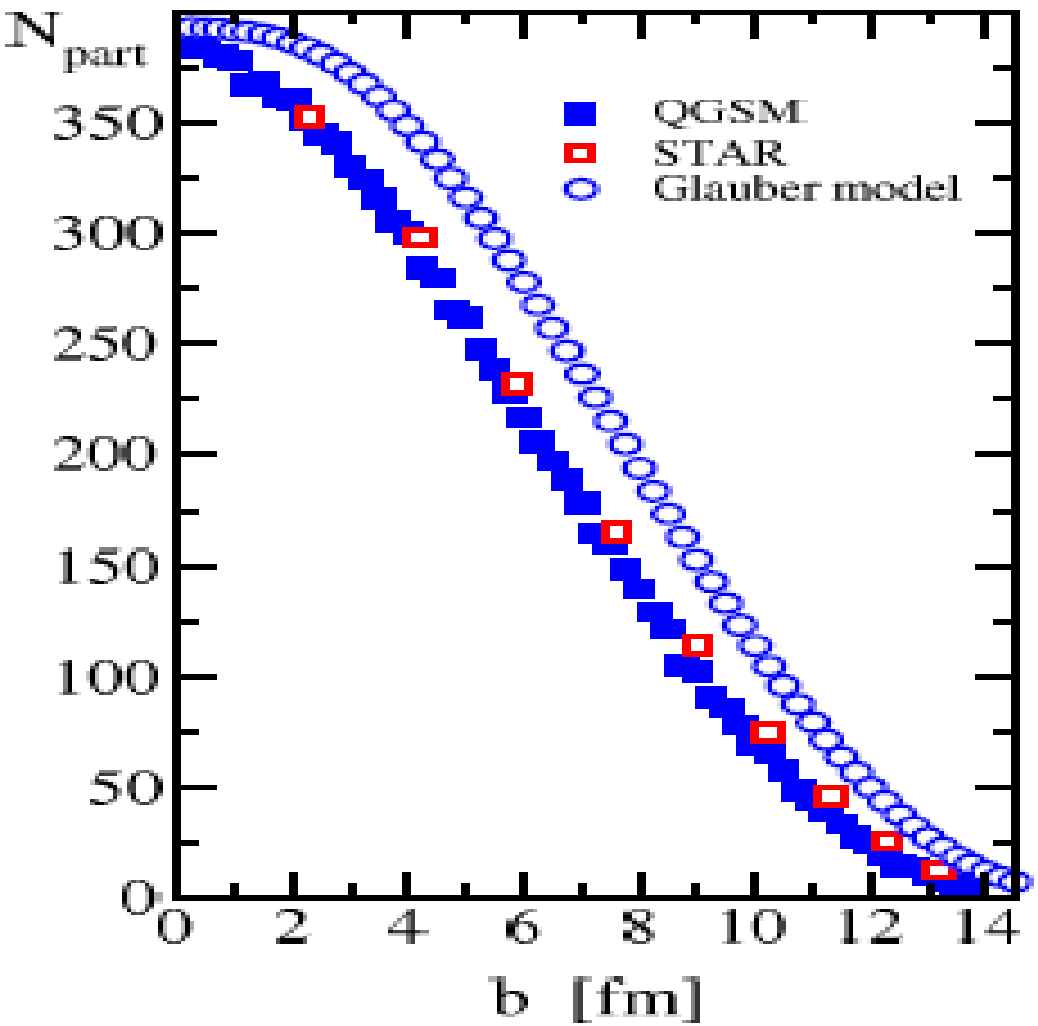
где функция

$$T_A(b) = \int \rho_A(b, z) dz \tag{47}$$

называется функцией толщины ядра A, которая может быть интерпретировано как число нуклонов ядра A видимое нуклоном ядра B, пролетающим с прицельным параметром b. $P^A_{\geq 1}(b_1)$ является вероятностью того, что нуклон пролетающий через ядро A с прицельным параметром b_1 примет участие по крайней мере в одном столкновении (биномиальное распределение):

$$P^A_{\geq 1}(b_1) = 1 - \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\sigma_{in} T_A(b_1)}{A}\right)^0 \left(1 - \frac{\sigma_{in} T_A(b_1)}{A}\right)^{A-0} = 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{in} T_A(b_1)}{A}\right)^A \tag{48}$$

Для больших значений A величина $P^A_{\geq 1}(b_1) \approx 1 - e^{\sigma_{in} T_A(b_1)}$. Для центральных и симметричных ($A = B$) столкновений число нуклонов-участников пропорционально A. Итак, экспериментально оценивая число нуклонов-участников, мы можем оценить при каком прицельном параметре произошло столкновение ядер - триггер центральных столкновений ядер!


N part
350
300
250
200
150
100
50
0
0
2
4
6
8
10
12
14
b [fm]
QGSM
STAR
Glauber model

Оценка числа событий с рождением редких частиц. **Рассмотрим пример центрального** $(\vec{b} = 0)$ **столкновения двух одинаковых ядер золота с числом нуклонов** $A = 197$**. Мы можем оценить среднее число нуклонов-участников столкновений при энергии** $\sqrt{s}$ **ускорителя в центральных соударениях ядер, которые приводят, например, к рождению редких частиц** σ_0 **мезонов:**

$$< n_{\sigma_0}(\sqrt{s}, b = 0) >= 2A^2 T(0)\sigma^{nn}_{\sigma_0}(\sqrt{s}), \tag{49}$$

где $\sigma^{nn}_{\sigma_0}(\sqrt{s})$ **это сечение рождения** σ_0 **мезона в одном неупругом нуклон-нуклонном столкновении при энергии** $\sqrt{s}$**.**

Если выбрать ядерную плотность в виде

$$\rho_A(r) = \frac{3}{4}\frac{1}{\pi R_A^2}\Theta(R_A^2 - r^2), \tag{50}$$

$R_A = 1.12A^{1/3}$ **ферми, тогда функция профиля ядер вычисляется аналитически**

$$T(0) = \frac{9}{8}\frac{1}{\pi R_A^2}. \tag{51}$$

Если взять величину сечения $\sigma_0 \approx 15$ **мкбарн для энергии Дубненского нуклотрона, на котором будут ускорены ионы золота, а велична** $197^2 T(0) \approx 32$ **мбарн**$^{-1}$**. Тогда мы получим, что в одном центральном столкновении ядер золота возможно будет рождаться один** σ_0 **мезон!**

Тормозная способность ядер характеризует потери начальной энергии ядер в неупругих столкновениях.

- Для количественной оценки тормозной способности ядер обычно используются сдвиги пиков в экспериментальных быстротных распределениях разности протонов и антипротонов относительно быстрот нуклонов из ядерных пучков: $y_0 \approx \pm \ln(2E_0/m)$, где E_0- начальная энергия нуклона из ядерного пучка в системе центра масс сталкивающихся нуклонов, а m - масса нуклона.
- При высоких энергиях, в протон-протонных соударениях в распределениях по быстроте рождающихся протонов можно видеть два разделяющихся пика. Сохранение такого пика в протон-ядерных столкновениях называется ядерной прозрачностью.
- В следствие этого явления возникает вопрос о возможности достижения больших значений барионной и энергетической плотностей, наращивая энергию пучка.
- Представляет интерес также вопрос о том как много начальных барионов в ядро - ядерном столкновении переходят в центральную область быстрот. Наличие барионов в центральной области быстрот определяет тип ожидаемой кварк-глюонной плазмы свободной от барионов или насыщенной барионами, так как свойства этих двух состояний являются совершенно различными и могут проявляться различными экспериментальными сигналами.

Партон-струнная модель (PSM)

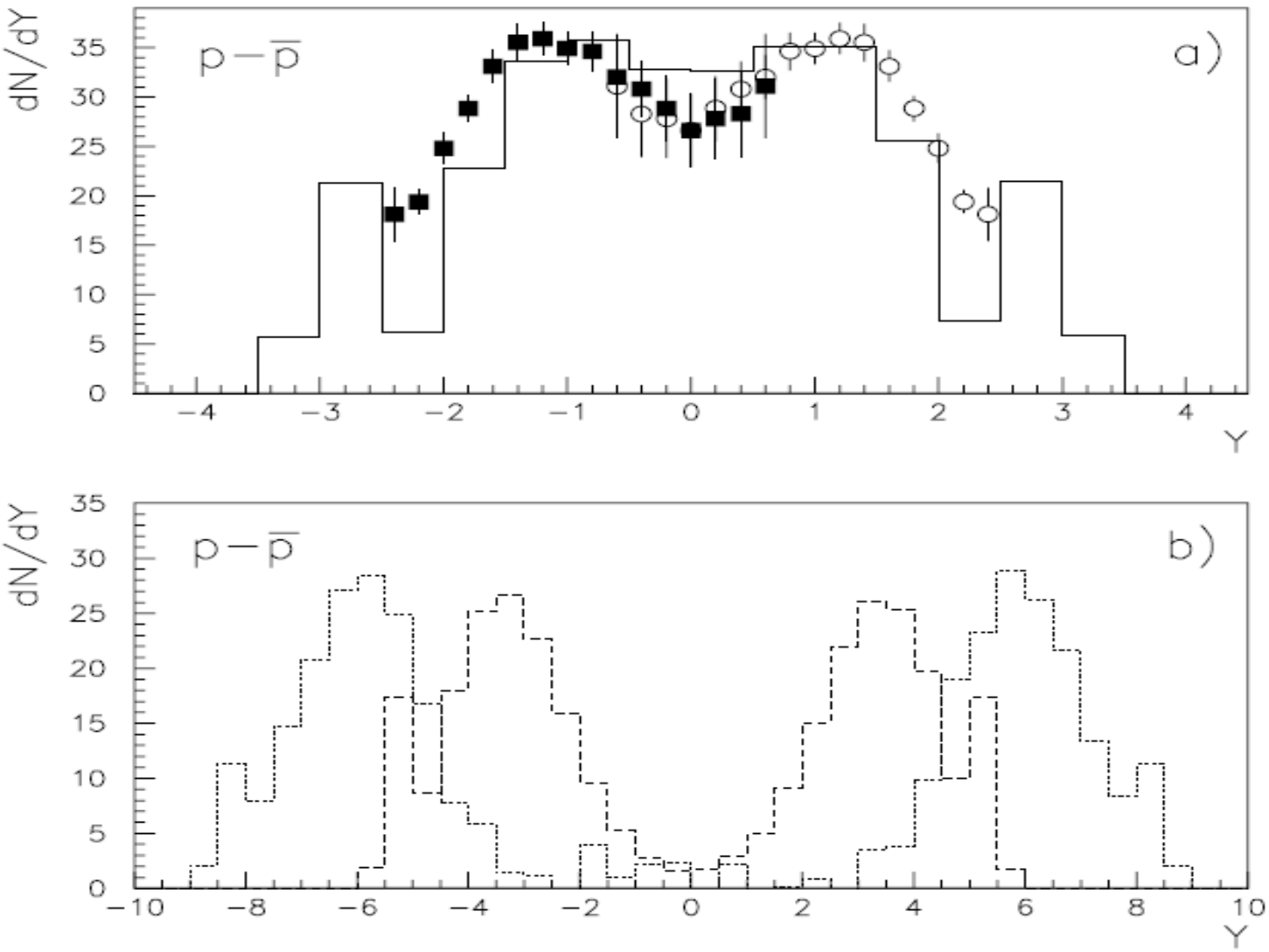


Fig. 10a,b. Results in the model for the p–$\bar{p}$ rapidity distribution in central (5% centrality) PbPb collisions at SPS **a**, solid line, and RHIC and LHC **b**, dashed and dotted lines respectively, compared with experimental data at SPS [72]

Оценка тормозная способности ядер (C.Y. Wong'85).

Следуя эксперименту, распределение нуклонов, образующихся в результате однократных неупругих нуклон-нуклонных взаимодействий при высоких энергиях, по доле переменной светового конуса $x_1 = (E + p_z)/(E_0 + p_0)$, где E и p_z соответственно энергия и продольный импульс рожденного нуклона и E_0 и p_0 соответственно энергия и импульс начального нуклона, можно представить в виде:

$$W(x_0, x_1) = \alpha x_1^{\alpha-1}, \tag{52}$$

где $\alpha \approx 1$. В этом выражении $x_0 = 1$ относится к начальному нуклону. Предполагая, что такое же распределение имеет место и для последующих перерассеяний, мы получим для плотности вероятности для нуклона иметь значение x_n после n-кратного столкновения:

$$W(x_{n-1}, x_n) = \alpha(\frac{x_n}{x_{n-1}})^{\alpha-1}\frac{1}{x_{n-1}}, \tag{53}$$

где значение x_{n-1} достигается после $n-1$-кратного столкновения.

Так как x_n не может превышать x_{n-1}, то распределение $W(x_{n-1}, x_n)$ может быть нормировано:

$$\int_0^{x_{n-1}} W(x_{n-1}, x_n)dx_n = 1. \tag{54}$$

Оценка тормозная способности ядер (C.Y. Wong'85). Используя выражение

$$W(x_{n-1}, x_n) = \alpha(\frac{x_n}{x_{n-1}})^{\alpha-1}\frac{1}{x_{n-1}}, \tag{55}$$

можно выписать уравнение для нормированного распределения нуклонов после n-кратного столкновения $D^n(x_n)$ в следующем виде:

$$D^n(x_n) = \int_{x_n}^{1} dx_{n-1} D^{n-1}(x_{n-1}) W(x_{n-1}, x_n), \tag{56}$$

где

$$\int dx_n D^n(x_n) = 1. \tag{57}$$

Решая это уравнение для $D^n(x_n)$ можно вычислить как среднее значение x_n:

$$< x_n >= (\frac{\alpha}{\alpha+1})^n, \tag{58}$$

так и изменение среднего значения $< x >$ в результате столкновения:

$$< x_n >= \frac{\alpha}{\alpha+1} < x_{n-1} > . \tag{59}$$

Оценка тормозная способности ядер (C.Y. Wong'85).

Используя связь между переменной x и быстротой нуклона y, который имеет массу m и поперечную массу m_t:

$$x_n = \frac{m_t}{m} e^{y_n - y_0}, \tag{60}$$

где y_0 быстрота пучка, можно найти соотношение, показывающее изменения величины средней быстроты нуклона в результате столкновений:

$$< y_{n-1} > - < y_n >= \frac{1}{\alpha}. \tag{61}$$

Таким образом, в результате однократного столкновения нуклон теряет $1/\alpha$ единиц быстроты ($\alpha \approx 1$).

- **Для ускорителей AGS-БНЛ и SPS-ЦЕРН расстояние между быстротами ядер пучка и снаряда составляет примерно $4 \div 5$ единиц. Оценки по модели Глаубера показывают, что в тяжелых ядрах может иметь место $3 \div 4$-кратное столкновение нуклона, то есть возможна полная остановка нуклонов в ядре!**
- **Для коллайдера LHC-ЦЕРН, разница между быстротами пучка и мишени значительно больше и будет составлять более 10 единиц. Как показывают оценки кратности нуклонных столкновений в этом случае центральная область быстрот будет иметь нулевой барионный заряд!**

Модель Глаубера-Грибова (В.Н. Грибов'68,В. Р.Золлер'88).

- **Подход Глаубера первоначально был сформулирован для взаимодействий нуклонов с ядрами при нерелятивистских энергиях, когда взаимодействие с ядром рассматривалось как последовательность упругих перерассеяний нуклона под малыми углами.**
- **При релятивистских энергиях, когда происходит рождение частиц, такая картина взаимодействий нуклона с ядерной мишенью становится неверной.**
- **Тем не менее в рамках реджионной теории, и при релятивистских энергиях неупругие ядерные взаимодействия можно "выразить"через независимые, но неупругие!!! нуклон - нуклонным взаимодействия, когда упругая амплитуда взаимодействия ядер аппроксимируется обменом невзаимодействующих реджеонов-померонов и получить "глауберовские"формулы и, более того, дать инвариантную партонную интерпретацию процесса неупругого взаимодействия ядер (О. Канчели'77). Эти формулы дают разумное описание эксперимента.**

Модель Глаубера-Грибова (В.Н. Грибов'68, В. Р.Золлер'88). Вероятность неупругого столкновения ядер с числом нуклонов A и B и прицельным параметром $\vec{b}$ при энергии $\sqrt{s}$ можно получить в виде удобном для применения в Монте-Карло генераторе событий неупругих столкновений релятивистских ядер:

$$P(s,\vec{b}) = \int \prod_{i,j=1} p_{ij}(s,\vec{b}_i^A - \vec{b}_j^B) \prod_{k,l=1} (1 - p_{kl}(s,\vec{b}_k^A - \vec{b}_l^B)) \\ T_A(\vec{b}_1)T_A(\vec{b}_2)...T_B(\vec{b}-\vec{b}_B)d\vec{b}_1^A d\vec{b}_2^A ... d\vec{b}_B^B, \tag{62}$$

если ввести функцию толщины ядра

$$T_A(\vec{b}) = \int \rho_A(\vec{b},z)dz, \tag{63}$$

и $p_{ij}(s,\vec{b}_i^A - \vec{b}_j^B)$ вероятности независимых неупругих столкновений нуклонов i и j при полной их энергии в системе центра масс $\sqrt{s}$, которая определяется параметрами померона (померонной траекторией и вершиной нуклон-померонного взаимодействия).

В более символическом виде вероятность неупругого столкновения ядер можно записать:

$$P(s,\vec{b}) = < \prod_{i,j=1} p_{ij}(s,\vec{b}_i^A - \vec{b}_j^B) \prod_{k,l=1} (1 - p_{kl}(s,\vec{b}_k^A - \vec{b}_k^B)) > . \tag{64}$$

Партон-струнные модели.

- Существуют несколько, часто используемых, феноменологических численных моделей, реализованных в виде Монте-Карло генераторов событий столкновений ядер (FRITIOF (Lund), VENUS (Heidelberg), HIJING (Brookhaven), PSM(Dubna),...), которые "опираются"на модель Глаубера-Грибова при расчете неупругих внутриядерных столкновений.
- Это прежде всего, так называемые партон-струнные модели, когда в результате внутриядерных неупругих столкновений нуклонов возбуждаются объекты, имеющие свойства релятивистских струн с кварками (партонами) на концах. 4-х импульсы струн определяются из знания структурных функций нуклонов. Эволюционируя эти струны распадаются на конечные адроны и адронные резонансы.
- Подобная модель, названная партон-струнной моделью (PSM) была создана в виде компьютерной программы, в Лаборатории высоких энергий в коллаборации с нашими коллегами из университета Сантияго де Компостела (Испания). Подробное описание PSM модели и программы можно найти на веб-странице http://www-cunuke.phys.columbia.edu/OSCAR/models/list.html там же можно найти и брать!! программы многих других моделей-генераторов.

Релятивистская кинетика

Функция распределения (С. де Гроот и др., Рел. Кин. Теория, Мир, 1983). Рассмотрим безспиновую частицу типа i расположенную в точке $x^\mu = (t, \vec{x})$ и имеющую 4-импульс $p_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i)$, где $\mu = 0, 1, 2, 3$. Квадрат массы частицы определен как $m_i^2 = p_i^\mu p_{i\mu}$ и энергия как $E_i = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$. Можно ввести инвариантную относительно преобразования Лоренца (скалярную) одночастичную функцию распределения $f_i(x, p_i)$ частиц сорта i. $f_i(x, p_i)d^3xd^3p$ имеет смысл среднего числа частиц, которые в момент времени t находятся в элементе объема d^3x с центром в точке $\vec{x}$ и имеют импульсы в пределах $(\vec{p}_i, \vec{p}_i + d^3p_i)$.

Если рассмотреть систему N релятивистских частиц с массой m_i, которые описываются координатами $\vec{x}_k(t)$ и импульсами $\vec{p}_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., N$, являющимися функциями времени t, тогда для численных расчетов одночастичную функцию распределения можно аппроксимировать выражением:

$$f(x, p) =< \sum_{k=1}^{N} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_k(t))\delta^3(\vec{p} - \vec{p}_k(t)) >, \qquad (65)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю систем частиц. Если имеется смесь из разных типов частиц, тогда

$$f(x, p) = \sum_i f_i(x, p_i). \qquad (66)$$

Кинетическое уравнение Больцмана. Если рассматривается эволюция релятивистского разреженного газа, состоящего из частиц одного сорта, когда существенны только двухчастичные локальные упругие взаимодействия частиц, то это уравнение имеет вид:

$$p^{\mu}\partial_{\mu}f(x,p) = C(x,p) = C_{\mathbf{gain}}(x,p) - C_{\mathbf{loss}}(x,p), \tag{67}$$

где символом $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla})$ **обозначено дифференцирование по пространственно-временным переменным. Левая сторона уравнения (67) описывает свободное распространение частиц, в то время как столкновительный член в правой части уравнения**

$$C(x,p) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p_1}{E_1}\frac{d^3p'}{E'}\frac{d^3p'_1}{E'_1}[f(x,p')f(x,p'_1)W(p',p'_1|p,p_1) - f(x,p)f(x,p_1)W(p,p_1|p',p'_1), \tag{68}$$

представленный суммой лоренц-инвариантных интегралов по фазовому пространству, описывает приток и отток частиц в результате столкновения.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Умножение столкновительного члена на $\frac{1}{2}$ необходимо, в силу неразличимости конечных состояний с импульсами (p_1, p') и (p', p_1). Скорость перехода частиц $W(p, p_1|p', p_1')$ может быть выражена через измеряемое дифференциальное сечение процесса столкновения частиц $d\sigma(s,t)$:

$$d\sigma(s,t) = \frac{1}{F} W(p, p_1|p', p_1') \frac{d^3p'}{E'} \frac{d^3p_1'}{E_1'}. \tag{69}$$

В выражении (69) величину

$$F = \sqrt{(p_\mu p_1^\mu)^2 - m^4} = \frac{1}{2}\sqrt{s(s-4m^2)} \tag{70}$$

называют инвариантным потоком и кинематические переменные $s = (p + p_1)^2$ и $t = (p_1' - p_1)^2$ определены с помощью 4- импульсов сталкивающихся $(p,\ p_1)$ и рассеянных (p', p_1') частиц, для которых имеет место закон сохранения энергии импульса $p^\mu + p_1^\mu = p'^\mu + p_1'^\mu$. Вводя скорость частицы $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$, уравнение Больцмана может быть переписано в трехмерной нековариантной форме:

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f(x,p) =$$
$$\frac{1}{2E} \int \frac{d^3p_1}{E_1} \frac{d^3p'}{E'} \frac{d^3p_1'}{E_1'} [f(x,p') f(x,p_1') W(p', p_1'|p, p_1) - f(x,p) f(x,p_1) W(p, p_1|p', p_1'). \tag{71}$$

Локальные характеристики эволюционирующей системы. Знание одночастичных функций распределения дает возможность вычислить лоренц-инвариантным образом макроскопические величины - локальные характеристики системы, эволюция которых может моделироваться, и которые косвенным образом могут быть оценены экспериментально.

Можно определить локальную плотность частиц:

$$n_i(x) = \int d^3p_i f_i(x, p_i) \tag{72}$$

и 3-вектор потока частиц:

$$\vec{j}_i = \int d^3p_i \frac{\vec{p}_i}{2E_i} f_i(x, p_i). \tag{73}$$

Можно объединить значения плотности и 3-вектора потока в 4-вектор потока частиц:

$$N_i^\mu = \int d^3p_i \frac{p_i^\mu}{2E_i} f_i(x, p_i), \tag{74}$$

Локальные характеристики эволюционирующей системы. Можно также определить локальный тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_i \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} p_i^\mu p_i^\nu f_i(x, p_i). \tag{75}$$

Для того, чтобы определить величины лоренц-инвариантным способом необходимо ввести так называемую гидродинамическую 4-скорость $u^\mu(x)$. Это времени-подобный 4-вектор, определенный в каждой пространственно-временной точке и $u_\mu(x)u^\mu(x) = +1$. Тогда, например, скалярная локальная величина плотности частиц будет определена следующим образом

$$n_i(x) = N_i^\mu(x) u_\mu(x). \tag{76}$$

Таким образом, имея кинетическую модель столкновения ядер, мы, например, можем изучать эволюцию барионной плотности(!):

$$n_B(x) = \sum_{i=1}^{K} b_i N_i^\mu(x) u_\mu(x), \tag{77}$$

где K это число видов частиц в системе и это b_i барионный заряд i-того сорта частиц.

Локальное равновесие. Функция распределения системы частиц с течением времени эволюции будет стремится к определенному пределу, который описывает равновесное состояние системы. Эта предельная функция достигается тогда, когда столкновительный член уравнения Больцмана обращается в нуль и она называется распределением Юттнера:

$$f_i(x,p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\exp(-\frac{p_\mu u^\mu(x) - \mu_i(x)}{T(x)}), \tag{78}$$

где $T(x)$ и $\mu(x)$ локальная температура и локальный химический потенциал, соответственно а $u^\mu(x)$ - гидродинамическая 4-х скорость.

В случае, когда система достигает локального термодинамического равновесия, ее дальнейшая эволюция может быть описана в рамках релятивистской гидродинамики, т. е. в соответствии с гидродинамическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu}(x) &= 0, \\ \partial_\mu N^\mu(x) &= 0. \end{aligned} \tag{79}$$

Здесь первое уравнение является следствием закона сохранения энергии-импульса, а второе уравнения, называемое уравнением непрерывности, может быть получено из кинетического уравнения, путем интегрирования по импульсу и учета того, что в случае равновесия столкновительный член уравнения Больцмана равен нулю.

О локальном равновесии и решении уравнения Больцмана.

- **Следует подчеркнуть, что локальные макроскопические характеристики системы, такие как плотность энергии, плотность числа частиц, плотность энтропии и т.д., определенные через одночастичные функции распределения $f_i(x, p_i)$ не требуют предположения о термодинамическом равновесии системы (!!). Более того, вычисление этих величин в кинетических моделях путем численного решения кинетических уравнений позволяет прослеживать эволюцию системы от сильно неравновесного состояния к состоянию равновесия!**

- **Следует подчеркнуть, что функция Юттнера для конечных систем не является решением уравнения Больцмана, для этого не только столкновительный член, но и левая часть уравнения должны обращаться в ноль.**

Аналитическое решение нерелятивистского уравнения Больцмана. **В нерелятивистском случае, когда импульсы частиц малы по сравнению с их массами m, можно привести простой, но физически интересный пример решения уравнения Больцмана для системы N частиц изначально находящихся в глобальном равновесии, то есть имеют импульсное распределение, характеризуемое температурой T_0 и изотропное Гауссово пространственное распределение, описываемое квадратичным радиусом R^2. Предполагалось, что в процессе эволюции частицы будут сталкиваться упруго, то есть столкновительный член имеет вид**

$$C_{\text{gain}}(x,p) - C_{\text{loss}}(x,p) = \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2p_1^0} d\Omega [f(x,p')f(x,p_1') - f(x,p)f(x,p_1)] F(s)\sigma(\sqrt{s},\theta) \tag{80}$$

где 4-импульсы частиц при парных рассеяниях сохраняются: $p + p_1 = p' + p_1'$, $d\Omega = d\cos\theta d\phi$, $\cos\theta = 1 + 2t/(s-4m^2)$, $s = (p+p_1)^2$, $t = (p-p')^2$, $F(s) = \frac{1}{2}[s(s-4m^2)]^{1/2}$ **это инвариантный поток частиц с массами m сталкивающихся при энергии в их центре масс $\sqrt{s}$ и $\sigma(\sqrt{s},\theta) = d\sigma_{el}/d\Omega$ это дифференциальное сечение рассеяния частиц в их системе центра масс на угол θ.**

Тогда решением нерелятивисткого уравнения Больцмана является функция $f(x,p) \equiv f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$:

$$f(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{N}{\left[2\pi R_0 (mT_0)^{1/2}\right]^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - t\mathbf{p}/m)^2}{2R_0^2} - \frac{\mathbf{p}^2}{2mT_0}\right). \tag{81}$$

Аналитическое решение нерелятивистского уравнения Больцмана. Можно также показать (T. Csorgo'98), что данное решение представляет собой также и решение гидродинамических уравнений идеальной жидкости с радильным потоком, описываемым скоростью $\mathbf{u}(t,\mathbf{r})$ и может быть переписано в локально равновесном виде:

$$f(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) = f_{\mathbf{leq}} = \frac{N}{\left[2\pi R_0 (mT_0)^{1/2}\right]^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2R^2(t)} - \frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{u}(t,\mathbf{r}))^2}{2mT(t)}\right), \tag{82}$$

где $T(t) = T_0/\varphi(t)$, $R^2(t) = R_0^2\varphi(t)$ **и** $\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{r}\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) = \mathbf{r}tT(t)/(mR_0^2)$ **это соответственно температура, квадратичный радиус системы и скорость потока,** $\varphi(t) = 1 + T_0t^2/(mR_0^2)$**; соответствующий химический потенциал** $\mu(t,r) = -\frac{1}{2}T(t)\mathbf{r}^2/R^2(t)$**.**

Аналитическое решение нерелятивистского уравнения Больцмана. Подставляя решение в уравнение Больцмана, можно проверить, что левая часть уравнения $m\partial f/\partial t + \mathbf{p}\partial f/\partial \mathbf{r} = 0$. Подставляя решение в выражение (80), можно видеть, что столкновительный интеграл, то есть правая часть уравнения Больцмана также обращается в нуль, независимо от величины сечения столкновения и углового распределения, в следствии сохранения энергии-импульса:

$$[f(x,p')f(x,p_1') - f(x,p)f(x,p_1)] \propto \exp\left(-\frac{\mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}_1'^2}{2mT(t)} + \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{p}_1'}{T(t)}\mathbf{u}(t,\mathbf{r})\right) - \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_1^2}{2mT(t)} + \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}_1}{T(t)}\mathbf{u}(t,\mathbf{r})\right) \quad (83)$$

Импульсное распределение частиц остается неизменным в процессе эволюции независимо от величины сечения столкновения и формы углового распределения при рассеянии:

$$\frac{d^3N(t;\mathbf{p})}{d^3\mathbf{p}} = \frac{N}{(2\pi m T_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2mT_0}\right). \tag{84}$$

В тоже время из решения следует, что система расширяется и пространственная плотность частиц падает с возрастанием времени:

$$\frac{d^3N(t;\mathbf{r})}{d^3\mathbf{r}} = \frac{N}{(2\pi R^2(t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2R^2(t)}\right), \tag{85}$$

где $R^2(t) = R_0^2 + t^2 T_0/m$**.**

Данное решение уравнения Больцмана соответствует как бы свободному разлету частиц, несмотря на их столкновения! А из "гидродинамического"варианта решения (82) можно видеть,что консервация ипульсного спектра связана с тем фактом, что охлаждение системы компенсируется возрастанием скорости потока.

Импульсная корреляционная функция частиц. **В рассмотренном примере аналитического решения мы имеем информацию о координатах частиц и, следовательно, мы можем определить корреляционную функцию:**

$$C_2(\vec{q}) = 1 + \exp\left[-\left(R_0^2 - \frac{1}{4mT_0}\right)\mathbf{q}^2\right], \tag{86}$$

которая также, как и импульсный спектр частиц, не зависит от времени эволюции. Возрастание скорости потока, здесь также компенсирует эффект влияния возрастания размеров системы на двух частичную бозонную корреляционную функцию. То есть, используя метод фемтоскопии и получая радиус области излучения частиц, мы не можем сделать заключение, что эволюция системы, когда частицы сталкиваются остановилась в пределах этого радиуса!!!

Кинетические модели. Уравнение Больцмана (67), которое мы подробно рассмотрели может быть обобщено:

- Путем добавления новых столкновительных членов, например, рассматривая столкновения типа $3 \longrightarrow 2$ и $2 \longrightarrow 3$;
- Рассматривая смесь частиц разных типов, участвующих как в упругих так и неупругих столкновениях типа $i + j \longrightarrow k + l + ...$, а также в распадах $i \longrightarrow k + l, i \longrightarrow k + l + m, ...$ В этом случае каждый тип частиц k описывается своей функцией распределения $f_k(x, p_k)$ и тогда необходимо решать систему кинетических уравнений;
- Вводя полевые взаимодействия между частицами;
- Учитывая квантовую статистику частиц с разными спинами.

Существует достаточно много кинетических моделей-генераторов событий столкновений релятивистских ядер, реализованных в виде программ: QGSM, (Dubna), RQMD(Frankfurt), UrQMD (Frankfurt), ARC (Brookhaven),..., когда функции распределения частиц (адронов или кварков и глюонов) находятся из численных Монте-Карло решений систем кинетических уравнений, которые позволяют не только вычислять эволюционирующие характеристики взаимодействующих ядер (плотность энергии,...), но и одновременно вычислять наблюдаемые экспериментальным детектором величины (импульсные спектры, корреляционные функции,...)!

QGSM, Au+Au at Ecm = 200 AGeV

J. Bleibel, G. Burau, Amand Faessler, C. Fuchs

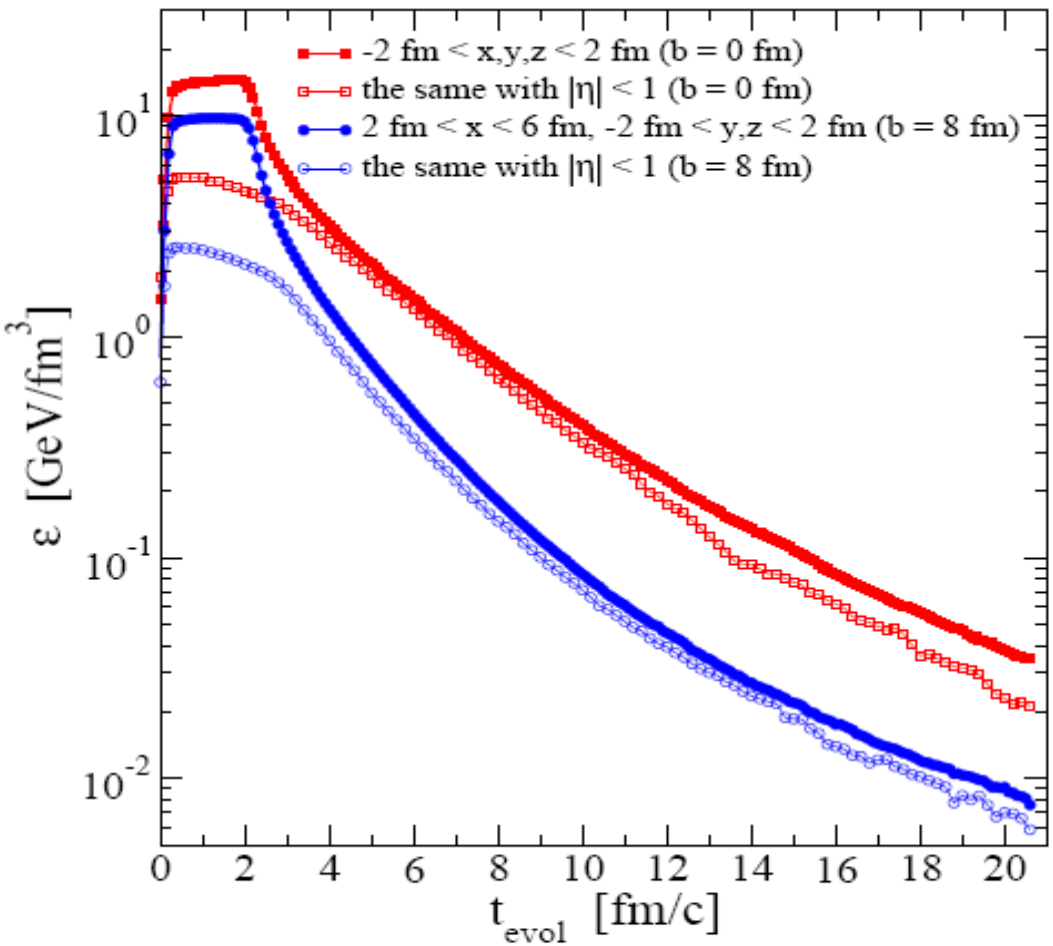


Fig. 2. Evolution of the energy density for a central cell in the overlap zone of the collision given by -2 fm $< x, y, z < 2$ fm for $b = 0$ fm and 2 fm $< x < 6$ fm, -2 fm $< y, z < 2$ fm for $b = 8$ fm. The curves with open symbols are the same but only for particles with a pseudorapidity of $|\eta| \leq 1$. See discussion in the text.

Универсальная кинетическая модель (UKM).

- **В Лаборатории Высоких Энергий (ОИЯИ) мы разработали кинетическую модель и программу, написанную на языке C++, которая позволяет находить численные решения систем Больцмановских кинетических уравнений (столкновения и распады).**
- **Универсальность программы означает, что тот же самый встроенный в нее численный алгоритм решения используется для описания кинетики частиц-адронов и частиц-партонов (кварков и глюонов) без переделки программы. Мы проверили программу на то, что она воспроизводит известные аналитические решения. Ниже приведен пример моделирования с воспроизведением описанного аналитического решения.**

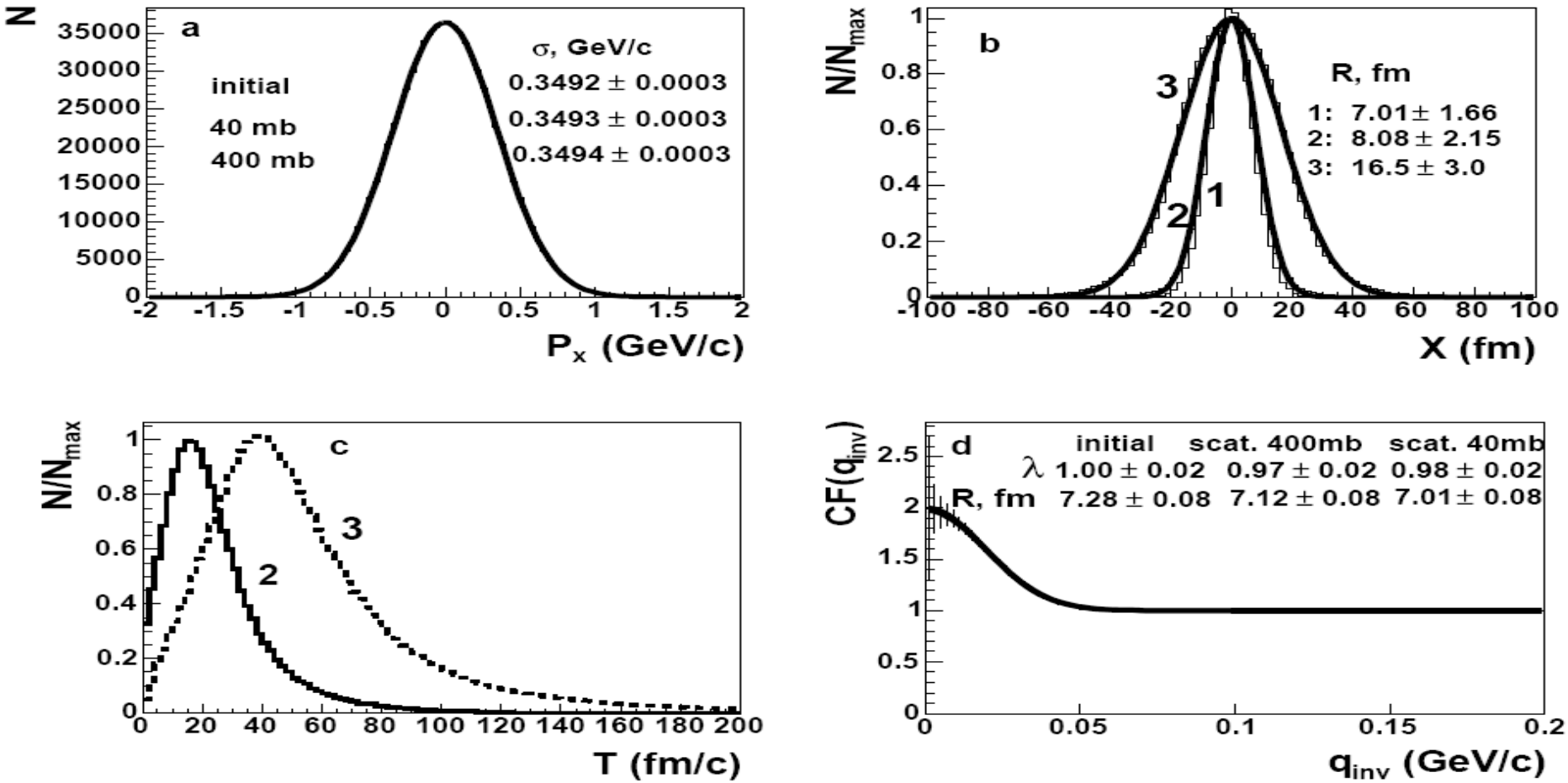


FIG. 3: Initial and final distributions of the x-components of particle three-momentum (**a**), spatial x- (**b**) and time (**c**) coordinates of the emission or last collision points and the CF's corresponding to these points as functions of q_{inv} (**d**) obtained in the UKM-R simulation of $N = 400$ heavy spin-0 bosons of mass $m = 0.938$ GeV/c^2 at the evolution time $t = 200$ fm/c. The histograms 1, 2 and 3 in panels **b** and **c** correspond to $\sigma_{el} = 0$ (initial x-distribution), 40 and 400 mb respectively. The shown results of Gaussian fits of the momentum distributions and the CF's agree with the input initial values $\sigma = (mT_0)^{1/2} = 0.3492$ GeV/c and $\lambda = 1$, $R_0 = 7$ fm respectively.

Релятивистская идеальная гидродинамика

Поток заряда частиц и тензор энергии импульса. Предположим, что частицы находятся в локальном термодинамическом равновесии, тогда кинетическая теория нам дает

$$N^{\mu}(x) = \sum_i q_i \int \frac{d^3k}{E} k^{\mu} f_i^{eqv}(x,k) = n(T,\mu)u^{\mu} \tag{87}$$

и

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_i \int \frac{d^3k}{E} k^{\mu}k^{\nu} f_i^{eqv}(x,k) = (\epsilon(T,\mu) + P(T,\mu))u^{\mu}u^{\nu} - P(T,\mu)g^{\mu\nu}, \tag{88}$$

где

$$n(T,\mu) = \sum_i q_i \int d^3k f_i^{eqv}(x,E) \tag{89}$$

локальная плотность заряда q_i частиц,

$$\epsilon(T,\mu) = \sum_i \int d^3k E f_i^{eqv}(x,E) \tag{90}$$

локальная плотность энергии и

$$P(T,\mu) = \sum_i \int d^3k \frac{k^2}{3E} f_i^{eqv}(x,E) \tag{91}$$

локальное давление. Равновесная функция распределения $f^{eqv}(x,E)$ взята в локальной системе покоя, где $u^{\mu} = (1,\mathbf{0})$.

Уравнения гидродинамики и уравнение состояния. Если мы рассмотрим только один тип заряда, например, барионный, тогда мы имеем 5 уравнений гидродинамики (законы сохранения):

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu}(x) &= 0, \\ \partial_\mu N^{\mu}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{92}$$

и нам необходимо найти 6 неизвестных (плотность энергии ϵ, барионная плотность n, давление P, а также 3 компоненты 4-вектора гидродинамической скорости $u^\mu(x)$, для которой $u^\mu(x)u_\mu(x) = 1$). Но в случае термодинамического равновесия давление и плотности числа барионов и энергии не являются независимыми, а определяются через температуру и химический потенциал и между ними существует связь $P(\mu, T)$ называемая уравнением состояния, которая оставляет только 5 независимых переменных.

Таким образом, если N^μ и $T^{\mu\nu}$ такие, что

$$N^\mu = nu^\mu \tag{93}$$

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} \tag{94}$$

(приближение идеальной жидкости, нет вязкости!), тогда уравнение состояния в виде

$$P = P(\epsilon, n) \tag{95}$$

замыкает систему гидродинамических уравнений и дает возможность найти решение этой системы при заданных начальных условиях.

Модель Бъеркина. (J. Bjorken'83) Если учитывать только временную эволюцию жидкости в продольном направлении, то мы можем записать уравнения гидродинамики в виде

$$\begin{array}{l} \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\mu N^\mu = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \partial_t T^{tt} + \partial_z T^{zt} = 0 \\ \partial_t T^{tz} + \partial_z T^{zz} = 0 \\ \partial_t N^t + \partial_z N^z = 0 \end{array} \tag{96}$$

Для получения решения этих уравнений, их удобно записать в переменных: собственное время

$$\tau^2 = t^2 - z^2 \tag{97}$$

пространственная быстрота

$$\eta = 0.5 \ln \left(\tfrac{t+z}{t-z}\right) \tag{98}$$

вместо переменных времени t и продольной координаты z.

В модели Бъеркина 4-х скорость потока жидкости выбирается в виде

$$u^\mu(\tau, \eta) = \gamma(1, 0, 0, \tfrac{z}{t}) = (\tfrac{t}{\tau}, 0, 0, \tfrac{z}{\tau}) = \tfrac{x^\mu}{\tau}, \tag{99}$$

то есть предполагается, что $\eta = 0.5 \ln \frac{1+v_z}{1-v_z} = 0.5 \ln \frac{p_0+p_z}{p_0-p_z} = y$(!) и считается (продольная лоренц-инвариантность или бъеркиновский скейлинг!), что давление не зависят от η. Тогда одно уравнение можно записать так

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0. \tag{100}$$

Уравнения гидродинамики Бъеркина. Плотность энергии. Мы можем вычислить производные от τ по отношению к x^μ следующим образом

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^0}=\frac{1}{2}\frac{1}{\tau}\frac{\partial(t^2-z^2)}{\partial t}=\frac{x^0}{\tau}=\frac{x_0}{\tau};\frac{\partial\tau}{\partial x^3}=\frac{1}{2}\frac{1}{\tau}\frac{\partial(t^2-z^2)}{\partial z}=-\frac{x^3}{\tau}=\frac{x_3}{\tau}, \tag{100}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}=\frac{x_\mu}{\tau}=u_\mu. \tag{101}$$

Мы можем также вычислить производные u^μ по отношению к x^ν

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}=\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{x^\mu}{\tau}=\frac{1}{\tau}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}-x^\mu\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial\tau}{\partial x^\nu}=\frac{1}{\tau}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}-\frac{1}{\tau^2}x^\mu u_\nu=\frac{1}{\tau}(\delta^\mu_\nu-u^\mu u_\nu)=\frac{1}{\tau}. \tag{102}$$

Эти соотношения мы можем использовать для того чтобы переписать уравнение:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)=0 \tag{103}$$

которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\omega u^\mu u^\nu)-\frac{\partial}{\partial x^\mu}(g^{\mu\nu}p)=u^\mu u^\nu\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}+\omega u^\mu\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}+\omega u^\nu\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}(g^{\mu\nu}P)=0, \tag{104}$$

где $\omega=\epsilon+P$. Четыре члена уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}u^\mu u^\nu\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}=u^\mu u^\nu\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega}{\partial\tau}=u^\mu u^\nu u_\mu\frac{d\omega}{d\tau}=u^\nu\frac{d\omega}{d\tau}.\\ \omega u^\mu\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}=\frac{1}{\tau}(\omega u^\mu\delta^\nu_\mu-\omega u^\mu u^\nu u_\mu)=\frac{1}{\tau}(\omega u^\nu-\omega u^\nu)=0.\\ \omega u^\nu\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu}=u^\nu\frac{\omega}{\tau}.\\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(g^{\mu\nu}P)=\frac{\partial\tau}{\partial x_\nu}\frac{dP}{d\tau}=u^\nu\frac{dP}{d\tau}.\end{gathered} \tag{105}$$

Наконец, собирая все вклады, мы получим уравнение для плотности энергии:

$$u^\nu(\frac{\partial\omega}{\partial\tau}+\frac{\omega}{\tau}-\frac{dP}{d\tau})=\frac{d\epsilon}{d\tau}+\frac{\epsilon+P}{\tau}=0. \tag{106}$$

Уравнения гидродинамики Бъеркина. Барионная плотность. Из уравнения для потока барионов мы можем переписать уравнение

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \tag{108}$$

следующим образом

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(n u_\mu) = u_\mu \frac{\partial n}{\partial x_\mu} + n \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} = u_\mu u^\mu \frac{dn}{d\tau} + \frac{n}{\tau} = \\ \frac{dn}{d\tau} + \frac{n}{\tau} = 0.\end{gathered} \tag{109}$$

Решением последнего уравнения очевидно является $n\tau = const$**.**

Уравнения гидродинамики Бъеркина. Плотность энтропии.

Используя термодинамику

$$d\epsilon = Tds + \mu dn, \tag{107}$$

и

$$\epsilon + P = Ts + \mu n, \tag{108}$$

из уравнения для плотности энергии мы получим уравнение для плотности энтропии:

$$T\frac{\partial s}{\partial \tau} + \mu\frac{\partial n}{\partial \tau} + T\frac{s}{\tau} + \mu\frac{n}{\tau} = 0, \frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{s}{\tau} = 0. \tag{109}$$

Уравнение для энтропии можно получить из условия сохранения 4-х тока энтропии, который дается выражением

$$s_\mu = (\frac{\epsilon + P}{T})u_\mu = su_\mu. \tag{110}$$

Этот ток должен сохранятся и поэтому уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(su_\mu) = u_\mu\frac{\partial s}{\partial x_\mu} + s\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} = u_\mu u^\mu\frac{ds}{d\tau} + \frac{s}{\tau} = \\ \frac{ds}{d\tau} + \frac{s}{\tau} = 0.\end{gathered} \tag{111}$$

Решением данного уравнения очевидно является $s\tau = const$**.**

Решения уравнений Бъеркина.

- **Независимо от выбранного уравнения состояния эволюция плотности энтропии и плотности барионов в модели Бъеркина дается соответственно выражениями (!):** $s(\tau) = s_0\tau_0/\tau$ **и** $n(\tau) = n_0\tau_0/\tau$**, где индекс** 0 **обозначает начальное значение.**

- **Эволюции же температуры и плотности энергии зависят от выбранного уравнения состояния. Например, предполагая уравнение состояния идеального газа, то есть** $P = \frac{1}{3}\epsilon$,$\epsilon \sim T^4$**, мы получим, из уравнения для плотности энергии**

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} + \frac{4\epsilon}{3\tau} = 0, \tag{110}$$

решение $\epsilon(\tau) = \epsilon_0(\tau_0/\tau)^{4/3}$ **и для температуры** $T(\tau) = T_0(\tau_0/\tau)^{1/3}$**.**

Оценка плотности энергии достигаемой при центральных соударениях тяжелых ядер, может быть сделана через экспериментальные измерения распределения рождающихся частиц по быстроте.

- **Используя определение переменной быстроты $y = 0.5 \ln \frac{p_0+p_z}{p_0-p_z}$ для частицы с полной энергией p_0 и продольным импульсом p_z, можно найти скорость частицы движущейся в продольном направлении z: $v_z = p_z/p_0 = \tanh y$. Если частица вылетает из начала координат, то эта скорость определяется через продольную координату z и время t: $z/t = v_z = \tanh y$. Тогда координата $z = \tau \sinh y$ и время $t = \tau \cosh y$ для частицы определяется через ее быстроту y и собственное время $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$.**

- **Будем искать плотность энергии в системе центра масс при $z = 0$ и в объеме $A_t \Delta z$, определенном через площадь перекрытия взаимодействующих ядер A_t и толщину Δz. Плотность частиц в этом объеме для $z = 0$ ($y = 0$) и при $\tau = \tau_0$ определяется как**

$$\frac{\Delta N}{A_t \Delta z} = \frac{1}{A_t} \frac{dN}{dy} \frac{dy}{dz} = \frac{1}{A_t} \frac{dN}{dy} \frac{1}{\tau_0 \cosh y}. \qquad (115)$$

- **Таким образом, используя $\Delta E = \Delta N p_0 = \Delta N m_t \cosh y$, где поперечная масс частиц $m_t \approx 0.35$ ГэВ, получим плотность энергии:**

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta E}{A_t \Delta z} = \frac{m_t}{\tau_0 A_t} \frac{dN}{dy}. \qquad (116)$$

Оценка плотности энергии В выражении

$$\epsilon_0 = \frac{m_t}{\tau_0 A_t}\frac{dN}{dy}. \tag{117}$$

величину τ_0 **определим как время формирования адронов, поэтому разумно взять** $\tau_0 \approx 1$ **Фм/с. Для центральных ядерных столкновений с прицельным параметром** $b = 0$ **Фм можно оценить** $A_t = \pi R^2 = \pi r_0^2 A^{2/3}$**, где** $r_0 = 1.2$ **Фм и** A**-число нуклонов ядра.**

Тогда, чтобы оценить плотность энергии, необходимо измерить быстротное распределение рожденных частиц dN/dy **при** $y = 0$**. Обычно измеряются быстротные распределения заряженных частиц** $dN_{ch}/dy \approx 3/2 dN/dy$**. Например, для центральных столкновений** $O + Au$ **при начальной энергии** 200 **АГэВ значение** $dN_{ch}/dy \approx dN_{ch}/d\eta \approx 110$**, тогда плотность энергии** $\epsilon \approx 2.3$ **Гэв/Фм**^{3}**(!) даже для этой реакции с участием легкого ядра кислорода, что сравнимо с оценками плотности энергии, критической для фазового перехода в кварк-глюонную плазму.**

Возможность образования кварк-глюонной плазмы путем повышения температуры. Рассмотрим случай, когда безмассовые невзаимодействующие кварки и глюоны находятся в равновесном состоянии в объеме V_{QGP}, при температуре T и суммарное барионное число в этой системе равно нулю, т. е. число кварков в системе равно числу антикварков. Тогда давление в этой системе:

$$P_{QGP} = [g_g + \frac{7}{8}(g_q + g_{\bar{q}})]\frac{\pi^2}{90}T^4, \tag{119}$$

где $g_g = 8 \times 2$ фактор (число степеней свободы) вырождения для глюонов, так как имеется 8 цветных глюонов, каждый из которых имеет две поляризации. g_q и $g_{\bar{q}}$ это соответственно числа вырождения для кварков и антикварков:

$$g_q = g_{\bar{q}} = N_c \times N_s \times N_f, \tag{120}$$

где $N_c = 3$ число цветов, $N_s = 2$ число спиновых состояний и $N_f = 2$ или $N_f = 3$ число ароматов. Если выбирать $N_f = 2$, тогда давление будет

$$P_{QGP} = 37\frac{\pi^2}{90}T^4 \tag{121}$$

Тогда критическая температура T_c (!) при которой давление в кварк-глюонной системе не сможет больше уравновешиваться внешним давлением B:

$$T_c = (\frac{90}{37\pi^2})^{1/4}B^{1/4}. \tag{122}$$

Плотность энергии кварк-глюонной системы при температуре T:

$$\epsilon_{QGP} = \frac{E_{QGP}}{V_{QGP}} = 3P_{QGP} = 37\frac{\pi^2}{30}T^4. \tag{123}$$

и если взять $T_c = 200$ МэВ, то для плотности энергии получим $\epsilon = 2.5$ ГэВ/Фм^3.

Возможность образования кварк-глюонной плазмы путем повышения температуры.

- **Величина внешнего давления, например,** $B = 0.4$ **ГэВ/Фм**^{3} **может быть взята из так называемой модели мешков, которая используется для описания свойств адронов. В этом случае получается значение критической температуры** $T_c \approx 169$ **МэВ.**

- **Таким образом, при повышении температуры выше критической давление мешка будет не в состоянии удерживать кварки и глюоны в связанном состоянии. Такое несвязанное состояние кварков и глюонов принято называть кварк-глюонной плазмой. Фазовый переход кварков и глюонов из связанного состояния в свободное называют фазовым переходом в кварк-глюонную плазму.**

- **Следует заметить, что для оценки критической температуры фазового перехода из адронной фазы в кварк - глюонную фазу необходимо приравнять давление кварк - глюонной системы** P_{QGP} **суммарному внешнему давлению** B **и давлению адронного газа (например, релятивистских пионов) (правило Гибса), т. е.** $P_{QGP} = B + P_\pi$**, где**

$$P_\pi = \frac{g_\pi \pi^2}{90} T^4 \tag{123}$$

и фактор вырождения $g_\pi = 3$ **для пионов (имеется 3 типа пионов:** π^+, π^-, π^0**).**

Возможность образования кварковой плазмы путем увеличения барионной плотности.

Рассмотрим так называемый вырожденный фермиевский газ кварков при нулевой температуре. Число состояний в объеме V_q с импульсом p находящимся в интервале $p \pm dp$ определяется в виде:

$$\frac{g_q V_q}{(2\pi)^3} 4\pi p^2 dp. \tag{125}$$

Так как в силу принципа Паули каждое состояние может быть занято одним кварком, то полное число кварков заполняющих состояния, ограниченные фермиевским импульсом μ_q, определяется как

$$N_q = \frac{g_q V_q}{(2\pi)^3} \int_0^{\mu_q} 4\pi p^2 dp = \frac{g_q V_q}{6\pi^2} \mu_q^3. \tag{126}$$

При этом плотность кваркового газа будет определяться выражением:

$$n_q = \frac{N_q}{V_q} = \frac{g_q}{6\pi^2} \mu_q^3. \tag{127}$$

Так как каждый кварк имеет барионный заряд равный $1/3$, то барионная плотность будет $n_B = 1/3 n_q$.

Возможность образования кварковой плазмы путем увеличения барионной плотности. Можно также определить энергию кваркового газа в объеме V_q:

$$E_q = \frac{g_q V_q}{(2\pi)^3} \int_0^{\mu_q} 4\pi p^3 dp = \frac{g_q V_q}{8\pi^2} \mu_q^4, \tag{128}$$

плотность энергии для этого газа:

$$\epsilon_q = \frac{E_q}{V_q} = \frac{g_q}{8\pi^2} \mu_q^4. \tag{129}$$

и давление:

$$P_q = \frac{1}{3} \frac{E_q}{V_q} = \frac{g_q}{24\pi^2} \mu_q^4. \tag{130}$$

Возможность образования кварковой плазмы путем увеличения барионной плотности. Состояние кваркового газа измениться, если давление P_q превысит давление мешка B. Из равенства давлений $P_q = B$ можно найти значение максимального фермиевского импульса кварков μ_q:

$$\mu_q = (\frac{24\pi^2}{g_q}B)^{1/4}, \tag{131}$$

которое соответствует критической барионной плотности:

$$n_{Bc} = \frac{4}{3}(\frac{g_q}{24\pi^2})^{1/4}B^{3/4}. \tag{132}$$

Выбирая значения $g_q = 3 \times 2 \times 2 = 12$ и $B = 0.4$ ГэВ/Фм^3, можно оценить критическую барионную плотность (!) $n_{Bc} = 0.72$Фм$^{-3}$, при которой возможен фазовый переход в кварковую плазму при нулевой температуре. При этом значение максимального Ферми импульса будет $\mu_q = 434$ МэВ.

Заметим, что для ядер соответствующие значения равновесной барионной плотности и максимального фермиевского импульса равны: $n_0 = 0.14$ Фм$^{-3}$ и 250 МэВ.

Влияние образования плазмы на эволюцию системы.

- **Используя гидродинамическую модель, можно исследовать эффекты влияния образования кварк-глюонной плазмы на эволюцию системы, чтобы понять их влияние на величины, измеряемые в эксперименте.**

- **Однако совсем простые оценки можно сделать даже не прибегая к гидродинамике:**

  Если в результате столкновения ядер образуется кварк-глюонная плазма с плотностью энтропии s_{QGP} и занимающая объем V_{QGP}, которая позднее перейдет в адронный газ с плотностью энтропии s_{HG} и занимающего объем V_{HG}, то в силу второго закона термодинамики $dS/dt \geq 0$ полная конечная энтропия будет больше чем полная начальная энтропия, то есть $s_{HG}V_{HG} > s_{QGP}V_{QGP}$ и тогда $V_{HG} > V_{QGP}$(!), так как плотность энтропии плазмы (больше число степеней свободы) больше плотности энтропии адронного газа, то есть $s_{QGP} > s_{HG}$.

- **Экспериментально мы можем измерять корреляционные функции и определять размер области испускания частиц, например, для различных быстротных интервалов.**

Влияние образования плазмы на эволюцию системы. (P. Huovinen'04)

Используем теперь модель Бъеркина, а именно, рассмотрим уравнение

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} + \frac{\epsilon + P}{\tau} = 0. \tag{133}$$

Для кварк-глюонной фазы в которой $\epsilon > \epsilon_{QGP}(T_c)$**, где давление** $P = 1/3(\epsilon - 4B)$ **это уравнение принимает вид**

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{4}{3}\frac{\epsilon - B}{\tau} \tag{134}$$

и, следовательно,

$$\frac{\epsilon - B}{\epsilon_0 - B} = (\frac{\tau_0}{\tau})^{\frac{4}{3}}. \tag{135}$$

Для смешанной фазы в которой $\epsilon_{QGP}(T_c) > \epsilon > \epsilon_\pi(T_c)$**, где давление** $P = P_c = const$ **это уравнение принимает вид**

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{\epsilon + P_c}{\tau} \tag{136}$$

и, следовательно,

$$\frac{\epsilon + P_c}{\epsilon_{QGP}(T_c) + P_c} = \frac{\tau_Q}{\tau} \tag{137}$$

и

$$\tau_Q = \tau_0 (\frac{\epsilon - B}{\epsilon_{QGP}(T_c) - B})^{\frac{3}{4}}. \tag{138}$$

Влияние образования плазмы на эволюцию системы.

Для адронной фазы в которой $\epsilon_\pi(T_c) > \epsilon$, где давление $P = 1/3\epsilon$, это уравнение принимает вид

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{4}{3}\frac{\epsilon}{\tau} \tag{139}$$

и, следовательно,

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_\pi(T_c)} = (\frac{\tau_H}{\tau})^{\frac{4}{3}} \tag{140}$$

и

$$\tau_H = \tau_Q(\frac{\epsilon_{QGP}(T_c) + P_c}{\epsilon_\pi(T_c) + P_c}). \tag{141}$$

Выбирая, $T_c = 169$ МэВ, которая следует из выбора $B = 0.4$ ГэВ/Ферми^3, $\tau_0 = 1$ Ферми/с и $\epsilon_0 = 5$ ГэВ/Ферми^3, мы получим $\epsilon_{QGP}(T_c) = 1.69$ ГэВ/Ферми^3 при $\tau_Q = 2.6$ Ферми/с и $\epsilon_\pi(T_c) = 0.097$ ГэВ/Ферми^3 при $\tau_H = 34.6$ Ферми/с. Если мы имеем дело только с одной фазой адронного газа, то те же значения энергетических плотностей достигаются соответственно за времена $\tau(\epsilon_{QGP}) = 2.3$ Ферми/с и $\tau(\epsilon_H) = 19.3$ Ферми/с. То есть фазовый переход замедляет расширение и охлаждение системы!

Гидродинамические модели. При исследования столкновений тяжелых ионов, конечно, используются более сложные и численные гидродинамические модели, чем подробно рассмотренная модель Бъеркина:

- Это модели учитывающие поперечное расширение системы с предположением о продольной (продольный скейлинг) инвариантности, так называемые $(2+1)$-мерные модели;
- Затем модели не предполагающие продольного скейлинга, так называемые $(3+1)$-мерные модели;
- Существуют гидродинамические модели, рассматривающие эволюцию нескольких типов адронной жидкости.
- Гидродинамические численные модели различаются также и по тому в каких координатах записаны уравнения (декартовых или гиперболических), так как некоторые начальные условия невозможно реализовать в тех или иных координатах, а также из-за возникновения трудностей при численных решениях;
- Конечно, все эти модели используют более сложные уравнения состояний;
- Кроме того, мы обсуждали только идеальную гидродинамику. В настоящее время для описания релятивистских столкновений ядер начали появлятся гидродинамические модели, учитывающие вязкость.

Решатель гидродинамических уравнений.

В Лаборатории Высоких Энергий (ОИЯИ) мы написали на языке C++ программу - решатель гидродинамических уравнений (Hydro Equations Solver (HES)). Она позволяет находить численные решения $(3 + 1)-$ мерных уравнений релятивистской гидродинамики и для этого использует метод так называемых сглаженных частиц.

- Этот метод не требует введения пространственной сетки. Он широко применяется при компьютерном моделировании в астрофизике, а также для моделирования взрывов.
- Впервые метод сглаженных частиц с целью моделировать эволюцию столкновений тяжелых ионов был применен профессором Ю. Хама и его сотрудниками из Бразилии из университета Сан-Пауло. Они разработали программу написанную на Фортране под названием SPHERIO.
- Большое преимущество данного метода состоит в возможности проводить компьютерное моделирование пространственно-временной эволюции релятивистских соударений тяжелых ионов, сохраняя флуктуации.
- Кроме того этот метод гораздо быстрей других используемых методов решения гидродинамических уравнений и, следовательно, более эффективен для пособытийной генерации столкновений тяжелых ионов, то есть программа может быть использована как генератор событий взаимодействия ядер.

Решатель гидродинамических уравнений.

- **Наша программа решения релятивистских уравнений гидродинамики методом сглаженных частиц находится в стадии тестирования и сравнения с известными аналитическими и численными решениями.**
- **На рисунке показана эволюция цилиндрически симметричной релятивистской пионной жидкости в поперечном направлении, которая в этом направлении, изначально имела нулевую скорость потока.**

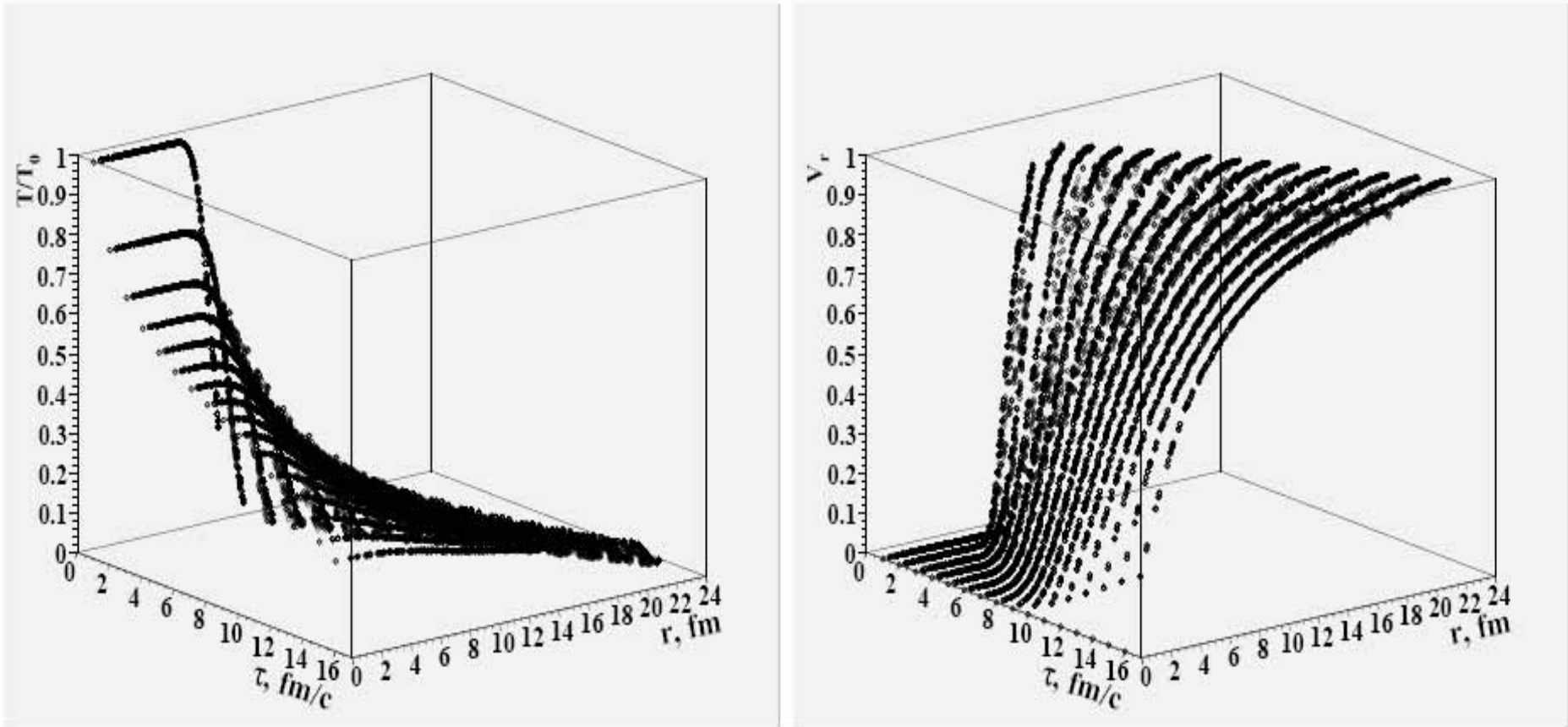


Рис. 3: Относительная температура (слева) и поперечная скорость потока (справа) как функции поперечного радиуса r при различных значениях собственного времени, начиная с $\tau = 1/c$ для центрального интервала пространственно-временных быстрот $|\eta| < 0.01$.

Быстрая МК процедура генерации («размораживания») адронов в ядро-ядерных столкновениях

1. **Плотности размораживающихся стабильных адронов и адронных резонансов зависят только от температуры T и химического потенциала $\mu = (\mu_S, \mu_B, \mu_{I3}, \mu_C)$. В Монте-Карло процедуре мы используем таблицу свойств адронов, которая включена в програмный пакет ROOT. В настоящее время только стабильные адроны и адронные резонансы состоящие только из u, d и s кварков (и следовательно $\mu_C = 0$) рассматриваются в модели. Всего включено в рассмотрение 85 барионов и мезонов.**

2. **Умножая плотности частиц на эффективный объем, вычисленный путем параметризации гипер-поверхности размораживания, мы получим средние множественности данных определенных типов частиц. В каждом событии множественности частиц разыгрываются по распределению Пуассона и определяют набор частиц для которых нам нужно сгенерировать координаты и импульсы.**

Быстрая МК процедура генерации («размораживания») адронов в ядро-ядерных столкновениях

3. **Зная распределения частиц внутри эффективного объема, мы генерируем поперечные и продольные координаты частиц.**

4. **В точках размораживания, мы вычисляем скорости потока жидкости.**

5. **Сначала мы генерируем импульсы частиц в системе покоя элемента жидкости, а затем, полученные импульсы адронов, преобразуются в систему центра масс сталкивающихся ядер, используя скорости потока жидкости в точках размораживания.**

Демонстрация МК генератора!